学校编号：10384 分类号 密级
学 号：19020071152111 UCD

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

圈与路乘积图的σ全一问题

The σ all-ones problem on Cartesian product graphs of paths and cycles

郑超翔

指导教师姓名： 钱建国

专 业 名 称： 应用数学

论文提交日期：2010 年 4 月

论文答辩日期：2010 年 6 月

学位授予日期： 年 月

答辩委员会主席：

评 阅 人：

2010 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（   ）课题（组）经费或实验室的资助，在（   ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均使用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

目录

content

摘　要

设G是这样一个图：其每个点可取状态 0 或 1；当我们按下某个点时，其相邻的点改变状态，即从 0 变为 1 或从 1 变为 0。 G上的σ全一问题叙述为：若每个点的原始状态均为 0，能否通过一系列地‘按点’操作使G上的点的状态全部变为 1。 特别地，若图G的每一个点都有一个自环，则该问题也称为σ^+全一问题，起源于 Sutner 的论文。

近年来σ^+全一问题得到了较深入地探讨，Sutner 和 Ramakrishnan 以及 Dodis 和 Winkler 都发文对此问题进行研究。用线性代数的理论，Sutner 证明σ^+全一问题对于任意图G总是有解的，并给出了$n\times n$的网格图上解的一些计数结果。Eriksson 等给出了解存在性的图论证明，进而，陈等给出了一个精巧的图论算法来找到一般图上的解。

而与σ^+全一问题不同，σ全一问题并不是对于所有图均有解（如C_3和P_5）。张和钱刻画了网格图与六角格上的σ全一问题无解的一个充要条件。本文则得到了以下结论：在第 2 章中，我们给出了一般乘积图关于σ全一问题的一些性质；在第 3 章中刻画了路与圈以及圈与圈的乘积图σ全一问题何时有解的一个充要条件；在第 4 章中研究多个路与圈构成的乘积图的σ全一问题。

关键词：σ全一问题，偶等价覆盖，奇等价覆盖，乘积图。

Abstract

Let G be a graph equipped with an indicator light and a button at each of its vertices. Initially all lights are off. If the button of a vertice is pressed, then the lights of all its adjacent vertices will change from off to on, and vice versa. This rule is also called the σ rule. The σ all-ones problem is then stated as: is it possible to press a sequence of buttons such that, in the end, all lights are on?

The σ all-ones problem originates from the socalled lamp lighting problem posed by Sutner in which a general graph is specifically presented by a chessboard and a 'button pressing' will change not only the status of its edge-adjacent squares but also its own square which is also called the σ^+ rule. It is known that the answer of the all-ones problem under σ^+ rule for any graph is 'Yes'. A σ^+ rule could be theoretically considered as a σ rule if we add a loop at each of its vertices.

In this thesis, we focus on the σ all-ones problem for some Cartesian product graphs. In Chapter 2, we give some basic properties for general product graphs. In Chapter 3, the product graphs of path and cycle, cycle and cycle which have a solution are characterized, respectively. Chapter 4 studies the multi-product graphs of paths and cycles.

Keyword: σ all-ones problem, even parity cover, odd parity cover, product graph.

第 1 章 引言

1.1 问题来源

全一问题来自于 Sutner 的论文[6]，表述如下：一间博物馆内有许多间房间，每间房间中都有一盏电灯和一个开关，当按下某个房间中的开关之后，这个房间以及与其相邻的所有房间中的灯都将会改变状态（由‘关’变‘开’或者由‘开’变‘关’）。问，能否找到一个按动开关的方法，使得电灯从全部都是关闭的状态变为全部打开的状态，这个问题也被称为σ^+全一问题。而该问题可以用图论的语言表述如下：

对于任意一个图G，每个点可取状态 0 或状态 1，而当我们按下某个点时，这个点以及其相邻的点均改变状态（从 0 变为 1 或从 1 变为 0）。问若起始时图G上的所有点均取状态 0，能否找到一个合适的按点序列，使得经过该序列的操作，图G上的点变为全 1 状态。

与上述σ^+全一问题不同，如果按下某个点时仅仅改变其相邻点的状态而不改变自身的状态，则将其称为σ全一问题。

已经证明，对于任意一个图G，σ^+全一问题均有解。于是人们的注意力开始转移到σ全一问题。

σ全一问题已被证明并不是对于所有的图类均有解，同时我们可以看出，只要对任意的图G上每一点均添加一个自环，则σ^+全一问题就转化为了σ全一问题。应用代数和图论的知识，Sutner[1]，Losser[2]和 Eriksson 等[11]分别证明了对任何一个每一个顶点都有自环的图可以点亮图上的每一个灯。而对于简单图，陈在[3]中给出了树的σ全一问题有解的一个充要条件。张和钱在[4]中刻画了网格图与六角格图的σ全一问题无解的一个充要条件。

1.2 定义与符号

笛卡尔乘积图：对任意两个图$G_1(V_1,E_1)$和$G_2(V_2,E_2)$，定义其笛卡尔乘积图$G(V,E)=G_1\times G_2$如下：$V=V_1\times V_2$，

$E=\{(u,v),(u',v'):(u,u')\in E_1, v=v'\in V_2$或$(v,v')\in E_2, u=u'\in V_1\}$。以下简称为乘积图

P_n：有n个点的路。

C_m：长为m的圈（本文仅考虑$m \ge 3$，即C_m是简单图的情况）。

网格图$R_{m,n}$：等价于$P_m \times P_n$。如图 1.1 所示（$m = 4, n = 6$）。

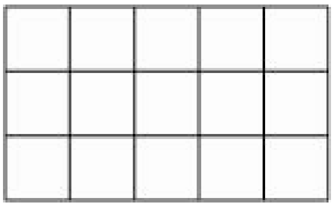

图 1.1.

偶度图：每个点的度数均为偶度的图。

在点子集V'下，$G(V, E)$中某个点x的覆盖数：对于给定的点子集$V' \subseteq V$，给定G中的某个点x（可以是V'中的点），若在点集V'中有n个点与x相邻，我们称在点子集V'下点x的覆盖数为n，在不引起歧义的前提下，可简称为点x的覆盖数为n。例如图 1.2 中，该图最左上角的点x的覆盖数即为 2。

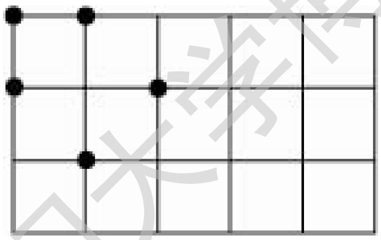

图 1.2

偶（奇）等价覆盖：设G是一个图，其点集为V，边集为E，对一个子集$V' \subseteq V$，如果对$\forall v \in V$，有v在V'下的覆盖数为偶（奇）数，则称V'是G的一个偶（奇）等价覆盖。例如图 1.3 所示，黑点所组成的点子集V'即为一个偶等价覆盖，可以看出G中的每个点的覆盖数为 0 或者 2（注意 0 也是偶数）。而图 1.4 中黑点所组成的点子集V'即为一个奇等价覆盖（每个点覆盖数均为 1）。

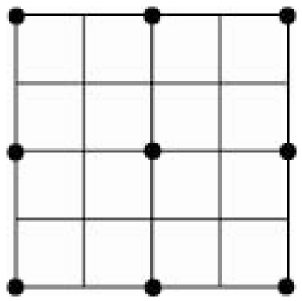

图 1.3

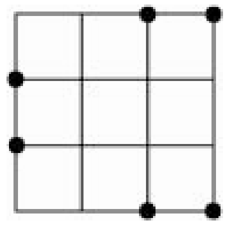

图 1.4

1.3 网格图的全一问题

张和钱在论文中指出：

定理 1.3.1[4] 网格图 $R_{m,n}$ 上σ 全一问题无解 $\Leftrightarrow$

(1) $n = k(m+1) - 1, m, k$ 都是奇数；或

(2) $m = 4k+1, n = 4h+1, k, h \in \{0,1,2,\cdots\}$ 。

而为了证明这一点，使用了以下的重要定理：

定理 1.3.2[2] 图 G 的 σ 全一问题无解当且仅当 G 有奇数势的偶等价覆盖。

定理 1.3.3[5] 设 G 是一个图，顶点集为 V，边集为 E。对 V 中的一个子集 $X \subseteq V$，X 是 G 的 σ 全一问题的一个解当且仅当 X 是奇等价覆盖。

引理 1.3.1[4] 设 P_1 和 P_2 为图 G 的两个等价偶覆盖，则其对称差 $P_1 \Delta P_2$ 也是图 G 的偶等价覆盖。进而，所有的偶等价覆盖 P 在运算 Δ 下构成一个群。

引理 1.3.2[4] 设 $G(X,Y)$ 是一个二部图，X，Y 是 G 的两个部分，P 是 G 的偶等价覆盖，则 $P \cap X$ 和 $P \cap Y$ 都是 $G(X,Y)$ 的偶等价覆盖。

引理 1.3.3[4] 设 P 是网格图 $R_{m,n}$ 的偶等价覆盖，如果 $m < n$，则 $C_i \cap P = \phi$，对 $\forall i = p(m+1)$ 或 $i = n - q(m+1) + 1, p, q \in \{1,2,\cdots\}$ 。

1.4 本文所得到的结果

对于一般的乘积图，本文得到以下结果

定理 2.1.1 若G_1和G_2为两个简单图，如果G_1和G_2两个图的σ全一问题均无解，那么$G_1 \times G_2$的σ全一问题亦无解。

定理 2.1.2 若G_1和G_2为两个简单图，如果G_1的σ全一问题有解，而G_2为偶度图，那么$G_1 \times G_2$的σ全一问题有解。

定理 2.1.3 若G_1和G_2为两个简单图，如果G_1的σ全一问题无解，且G_2为奇数势的偶度图，那么$G_1 \times G_2$的σ全一问题无解。

我们可以将网格图$R_{m,n}$等价视为$P_m \times P_n$，由于圈C_m和路P_m有一定的相关性，那么对于$C_m \times P_n$或者$C_m \times C_n$是否能够找到相应的σ全一问题无解的充要条件？对于该问题，本文给出结论：

定理 3.1.2 对于图$C_m \times P_n$，其σ全一问题无解$\Leftrightarrow$

$n = 4k+1, m \neq 4j, k, j \in N$。

定理 3.2.1 对于图$C_m \times C_n$，其σ全一问题有解$\Leftrightarrow$

$m = 4k$或者$n = 4j, k, j \in N$。

而之后我们还可以继续设想该问题是否可以拓展到多个圈与多个路相乘的问题。对于该问题，本文也给出结论：

定理 4.1.1 对任意给定的n个圈$C_{m_1}, C_{m_2}, \cdots, C_{m_n}$，设其圈的长度分别为$m_1, m_2, \cdots, m_n$，则$C_{m_1} \times C_{m_2} \times \cdots \times C_{m_n}$的$\sigma$全一问题有解$\Leftrightarrow$

$\exists i \in n$使得m_i是 4 的倍数。

定理 4.2.1 对于任意给定的路P_{n_1}以及n个圈$C_{m_1}, C_{m_2}, \cdots, C_{m_n}$，我们有$P_{n_1} \times C_{m_1} \times C_{m_2} \times \cdots \times C_{m_n}$的$\sigma$全一问题无解$\Leftrightarrow$

$n_1 = 4j+1, j \in N$且所有的$m_i (i \in 1,2,\cdots,n)$均不为 4 的倍数。

定理 4.3.1 对于$P_{n_1} \times P_{n_2} \times C_m$，我们有

(1)当$P_{n_1}\times P_{n_2}$ 有解时，$P_{n_1}\times P_{n_2}\times C_m$也有解。

(2)当$P_{n_1}\times P_{n_2}$ 无解时，

1. $m\neq 4k, k\in N$时，$P_{n_1}\times P_{n_2}\times C_m$无解。

2. $m=4k, k\in N$时，若$n_1=5$或$n_2=5$，则$P_{n_1}\times P_{n_2}\times C_m$有解。

第 2 章 乘积图

2.1 乘积图σ全一问题的几个定理

对于乘积图 $G=G_1\times G_2$，若 G_1 与 G_2 的σ 全一问题是否有解的情况已知，我们可以得到以下的定理。

定理 2.1.1 若 G_1 和 G_2 为两个简单图，如果 G_1 和 G_2 两个图的σ 全一问题均无解，那么 $G_1\times G_2$ 的σ 全一问题亦无解。

证明：设 $G_1=\{V_1,E_1\}$，$G_2=\{V_2,E_2\}$，设 $G_1\times G_2$ 点集为 V。因为 G_1 和 G_2 两个图的σ 全一问题均无解，根据定理 1.3.2，存在 G_1 和 G_2 的奇数势的偶等价覆盖，分别设其为 V_1'，V_2'，设这两个偶等价覆盖的势分别为 $2k+1$ 和 $2h+1$。对 $G_1\times G_2$，我们取 $V'=\{(v'_i,v'_j):v'_i\in V_1',v'_j\in V_2'\}$，易知 V' 是一个奇数势的点集，其势为 $|V_1'|\times|V_2'|$。此时，我们取任意一点 $v=(v_i,v_j)\in V$。若 V' 中的点均不与 v 相邻，则 v 的覆盖数为偶数（0）。若存在 V' 中的点与 v 相邻，根据乘积图的定义，这些相邻点的集合可以写为：

$$X=\{(v'_i,v_j):(v'_i,v_i)\in E_1\}\cup\{(v_i,v'_j):(v'_j,v_j)\in E_2\}$$

因为 G_1 和 G_2 为两个简单图，所以在 $G_1\times G_2$ 中，点 (v_i,v_j) 与自身不相邻，于是 X 中的两部分点集互不相交。又因为 V_1'，V_2' 是偶等价覆盖，所以 X 中这两部分点集的势均为偶数。而由于 v 的覆盖数为上述两部分点集相加，同样为偶数。所以 V' 为偶等价覆盖，且其势为奇数，由定理 1.3.2 可知 $G_1\times G_2$ 无解。

我们还可以得到定理 2.1.1 的推论：

推论 2.1.1 若 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 为 n 个简单图，且 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的σ 全一问题均无解，则 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 的σ 全一问题也无解。

该推论利用数学归纳法可以很容易的得到证明。

定理 2.1.2 若G_1和G_2为两个简单图，如果G_1的σ 全一问题有解，而G_2为偶度图，那么$G_1 \times G_2$的σ 全一问题有解。

证明：设$G_1 = \{V_1, E_1\}$，$G_2 = \{V_2, E_2\}$，设$G_1 \times G_2$的点集为V。因为G_1的σ 全一问题有解，所以存在G_1的奇等价覆盖V_1'。对$G_1 \times G_2$，我们取$V' = \{(\nu'_i, \nu'_j) : \nu'_i \in V_1', \nu'_j \in V_2\}$，那么，对任意一点$\nu = (\nu_i, \nu_j) \in V$，$V'$中与其相邻的点集全体为$X = \{(\nu'_i, \nu_j) : (\nu'_i, \nu_i) \in E_1\} \cup \{(\nu_i, \nu'_j) : (\nu'_j, \nu_j) \in E_2\}$，因为$G_1$和$G_2$为两个简单图，所以在$G_1 \times G_2$中，点$(\nu_i, \nu_j)$与自身不相邻，于是$X$中的两部分点集互不相交。而$X$中的前一部分点集由于$V_1'$是$G_1$的奇等价覆盖，因此其势为奇数，而后一部分点集由于$G_2$为偶度图，因此其势为偶数。两者相加之后可以得出$X$的势为奇数，因此$V'$是$G_1 \times G_2$的一个奇等价覆盖。由定理1.3.3 可知$G_1 \times G_2$有解。

类似推论 2.1.1，我们也可以得到以下推论：

推论 2.1.2 若$G_1, G_2, \cdots, G_n$为n个简单图，如果G_1的σ 全一问题有解，而$G_2, G_3, \cdots, G_n$为偶度图，那么$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$的$\sigma$ 全一问题有解

定理 2.1.3 若G_1和G_2为两个简单图，如果G_1的σ 全一问题无解，且G_2为奇数势的偶度图，那么$G_1 \times G_2$的σ 全一问题无解。

证明：设$G_1 = \{V_1, E_1\}$，$G_2 = \{V_2, E_2\}$，设$G_1 \times G_2$的点集为V。因为G_1的σ 全一问题无解，所以存在G_1的奇数势的偶等价覆盖V_1'。仿照定理 2.1.2 的证明过程，我们取$V' = \{(\nu'_i, \nu'_j) : \nu'_i \in V_1', \nu'_j \in V_2\}$，易验证该集合为奇数势的点集。同样的对于任意一点$\nu = (\nu_i, \nu_j) \in V$，而$V'$中与其相邻的点集全体也为$X = \{(\nu'_i, \nu_j) : (\nu'_i, \nu_i) \in E_1\} \cup \{(\nu_i, \nu'_j) : (\nu'_j, \nu_j) \in E_2\}$利用与定理 2.1.2 证明过程同样的讨论，我们可以得出X中的两部分点集互不相交，并且其两部分点集的势都为偶数，所以X的势为偶数。所以V'是$G_1 \times G_2$的一个偶等价覆盖，并且其势为奇数。由定理 1.3.2 可知$G_1 \times G_2$无解。

同样我们也有：

推论 2.1.3 若$G_1, G_2, \cdots, G_n$为n个简单图，如果G_1的σ全一问题无解，而$G_2, G_3, \cdots, G_n$为奇数势的偶度图，那么$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$的$\sigma$全一问题有解。

注记：对于一般的乘积图是否能够给出其σ全一问题是否有解的刻画？其作为开放问题留待进一步的研究。

第 3 章 $C_m \times P_n$与$C_m \times C_n$

3.1 $C_m \times P_n$

这一章我们将利用第 2 章关于乘积图σ全一问题的几个定理来刻画两个具体图$C_m \times P_n$以及$C_m \times C_n$的σ全一问题是否有解的充要条件。为了利用之前的定理，我们先给出P_n和C_m这两个图的σ全一问题是否有解的充要条件。

引理 3.1.1 对于路P_n，其σ全一问题无解等价于$n = 4k+1, k \in N$。

证明：对于路P_n，当$n = 4k+1$时，我们只需要从第一点开始隔一点选取一点（如图 3.1.1 黑点为选入等价覆盖的点），很容易看出该点子集为一偶等价覆盖，同时该点子集的势为$[(4k+1)/2]+1 = 2k+1$，于是当$n = 4k+1$时路P_n无解。

图 3.1.1

$n = 4k, n = 4k+2, n = 4k+3$时，其奇等价覆盖的构造方法分别为：1.选取$4i+2, 4i+3$，$i \in N$的点（如图 3.1.2）2.选取$4i+1, 4i+2$，$i \in N$的点（如图 3.1.3）3.选取$4i+1, 4i+2$，$i \in N$的点（如图 3.1.4）

图 3.1.2

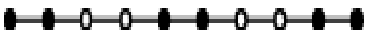

图 3.1.3

图 3.1.4

因此我们可知路P_n的σ全一问题无解等价于$n = 4k+1$。

引理 3.1.2 对于圈C_m，其σ全一问题有解等价于$m = 4k, k \in N$。

证明：同样，我们对于$m = 4k$构造其奇等价覆盖，如图 3.1.5，每隔两个点选取两个点加入点子集，可以验证每个点的覆盖数均为 1。所以此时其σ全一问题有解。